ANÁLISIS DE LAS CONCEPTUALIZACIONES ERRÓNEAS EN CONCEPTOS DE GEOMETRÍA Y SISTEMAS DE ECUACIONES: UN ESTUDIO CON ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS DE PRIMER INGRESO

Greivin Ramírez, Jeffry Chavarría, Marianela Mora, Cruz Barahona
Instituto Tecnológico de Costa Rica Costa Rica
Liceo Occidental de Cártago
Colegio Científico Costarricense
gramirez@itcr.ac.cr, jchavarria@itcr.ac.cr, mmcnela@gmail.com, cbarahona@gmail.com
Campo de investigación: Pensamiento algebraico y geométrico Nivel: Medio

Resumen. *En el presente artículo se reportan los resultados de una investigación que clasifica las conceptualizaciones que tienen estudiantes de primer ingreso universitarios de Costa Rica en temas de geometría y sistemas de ecuaciones mediante el modelo SOLO Taxonómico. Este modelo categoriza la actividad mental que realizan los sujetos cuando se enfrentan a una tarea escolar, considerando aspectos cuantitativos y cualitativos. Inicialmente los estudiantes se ubican en los primeros niveles de razonamiento en los temas de geometría y en niveles intermedios en sistemas de ecuaciones, al final los estudiantes mostraron mejoría después de un curso introductorio de matemáticas.*
Palabras clave: errores matemáticos, sistemas de ecuaciones

Introducción

En este artículo se exponen los resultados de una investigación, realizada en el Instituto Tecnológico de Costa Rica, donde se analizan y clasifican las formas de razonamiento mostradas por algunos estudiantes universitarios de primer ingreso en problemas de geometría y sistemas de ecuaciones. A pesar de que los estudiantes recibieron durante la secundaria formación en dichos temas y después de un semestre en un curso introductorio universitario se muestra que, ante situaciones similares, algunos estudiantes presentan obstáculos que han perdurado después del proceso. Así “un obstáculo epistemológico se incrusta en el conocimiento no formulado. Costumbres intelectuales que fueron útiles y sanas, pueden después de un tiempo obstaculizar” (Bachelard, 1976, p. 20).

Es importante recalcar que los obstáculos no son, los errores que ocurren al azar, sino más bien, conocimientos que fueron válidos en una situación pero en otro contexto producen error.

Un obstáculo es una concepción que ha sido en principio eficiente para resolver algún tipo de problemas pero que falla cuando se aplica a otro. Debido a su éxito previo se resiste a ser modificado o a ser rechazado: viene a ser una barrera para un conocimiento posterior. Se revela por medio de los errores específicos que son constantes y resistentes. Para superar tales obstáculos se precisan situaciones didácticas diseñadas para hacer a los alumnos conscientes de la necesidad de cambiar sus concepciones. (Godino, citado en Ruiz, 2006, p. 15)

Interesa responder la pregunta ¿cuáles son las formas de razonamiento que muestran estudiantes de primer ingreso universitarios en problemas de geometría y sistemas de ecuaciones? Se muestra situaciones en las que los sujetos generalizan algunos resultados, sin percatarse de que se tratan de conceptos aplicables a escenarios específicos.

Marco conceptual

Las últimas tendencias en la investigación acerca del pensamiento y cultura algebraica y geométrica, el desarrollo de niveles o jerarquías para describir el desarrollo cognitivo y los errores de los sujetos ha llegado a ser un objeto importante de estudio. Por ejemplo, la jerarquía de errores de Newman (en Clements, 1980, p. 4). Otro ejemplo, es la categorización de errores que hace Pochulu con alumnos que ingresan a la universidad, donde encontró que los principales errores se debieron a:

Concepciones inadecuadas sobre aspectos fundamentales de la Matemática; resultados de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado y totalmente identificable; utilización de procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas que no pudimos reconocer; y empleo de métodos y estrategias inventadas, no formales pero originales, para la realización de algunas de las situaciones propuestas. (Pochulu, 2005, p. 8)

Específicamente en Geometría, Smith (en Cury, 1994) desarrolló una investigación con alumnos de high school en Estados Unidos sobre errores de demostraciones que cometen los estudiantes.

Se concuerda que “hay error cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (Godino, Batanero y Font, 2003, p. 7).

Son dos las principales causas de los errores en el aprendizaje de las matemáticas:

Errores que tiene su origen en un obstáculo y errores que tiene su origen en una ausencia de significado. Estos últimos, tienen dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetivos matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático, y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. (Socas, 1997, p.4)

Entre los diversos modelos que se han propuesto para jerarquizar el desarrollo cognitivo, se encuentra el modelo taxonómico SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes) desarrollado por Biggs & Collis (1982). SOLO es un modelo que permite describir procesos involucrados en el aprendizaje, estableciendo categorías por orden de complejidad.

Aplicando el modelo al caso de sistemas de ecuaciones se tiene que los estudiantes:

1. *Preestructural*: poseen información aislada de los conceptos que intervienen en la solución de un problema a través de un sistema de ecuaciones (por ejemplo, la definición de las variables, la interpretación del lenguaje, formulación de las ecuaciones, entre otros) pero no comprenden la forma en que están relacionados. Sus respuestas no las justifican o lo hacen incorrectamente.

2. *Uniestructural*: relacionan en forma correcta algunos de los conceptos de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, en ítemes similares donde se modifica alguna variable de la tarea, muestran falta de una compresión adecuada. Utilizan un lenguaje impreciso. Tratan de resolver el problema con una sola ecuación. Por ejemplo, en el ítem 4 del cuestionario de diagnóstico los estudiantes toman únicamente a *y* como $y = x + 4$ o bien $y = 4x$ ó $x = 4y$.

4. Considere el siguiente problema:
La edad de María excede en 4 años a la edad de Carlos y la suma de sus edades es 32 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?
Si "x" representa la edad de María, y "y" la edad de Carlos, **plantee** un sistema de ecuaciones que permite resolver el problema anterior. (2 PUNTOS)

3. *Multiestructural:* relacionan en forma correcta conceptos envueltos en la solución del problema a través de un sistema de ecuaciones justificando adecuadamente sus respuestas. Se observan algunas inconsistencias en sus razonamientos y no autoevalúan su respuesta según el contexto del problema.

4. *Relacional:* son capaces de identificar las variables e interpretar el problema, construir las ecuaciones, relacionar los conceptos que intervienen, resolver el sistema de manera adecuada y autoevaluar su respuesta en el contexto del problema.

Metodología

La investigación es cualitativa y corresponde a un estudio de caso aplicado a estudiantes universitarios de distintas carreras y de nuevo ingreso que matricularon un curso introductorio de matemática durante el primer semestre de 2008.

Los principales instrumentos, de recolección de información fueron: un examen de diagnóstico, que consta de 9 ítemes abiertos, diseñado para explorar la comprensión que tienen los estudiantes sobre conceptos algebraicos y geométricos. Además de entrevistas grabadas en formato de video. El examen fue aplicado a 1102 estudiantes. Se analizaron dos ítemes a un 10% de la población (seleccionados aleatoriamente) con el fin de evaluar los errores cometidos. De estos, se realizaron entrevistas a tres estudiantes por ítem una vez que finalizaron el curso introductorio, para comparar las conceptualizaciones mostradas después de la instrucción. Esta última selección fue por conveniencia, de tal manera que se tomaron los estudiantes ubicadon en los niveles más bajos de razonamiento en el examen.

El análisis de desarrolla tomando en cuenta el avance secuencial del estudiante en el modelo SOLO. Con la respuesta brindada en el examen, al estudiante se le ubica en un nivel, para más tarde con la entrevista volverlo a ubicar en un nivel, y evaluar el crecimiento del mismo.

Resultados

Los resultados serán discutidos en dos niveles: un nivel descriptivo, que se obtiene de los sujetos de estudio en el examen de diagnóstico, este proporciona una idea de la comprensión de los conceptos investigados; y un segundo nivel, donde los sujetos son ubicados en categorías determinadas por las formas de razonamiento que exhibieron después de un semestre de instrucción. Se presenta el análisis completo de dos ítemes correspondientes a los temas de sistemas de ecuaciones (ítem 4) y geometría (ítem 6), pues fue donde los estudiantes presentaron mayores dificultades.

El examen de diagnóstico

El promedio de la nota obtenida fue de 55.28 con una desviación estándar de 18.55. El Análisis de confiabilidad de la prueba de diagnóstico fue realizado por medio de la técnica "Alfa de Cronbach", obteniendo un valor de 0.80.

Análisis de niveles de comprensión de los sujetos en sistemas de ecuaciones

Ítem 4

4. Considere el siguiente problema:
La edad de María excede en 4 años a la edad de Carlos y la suma de sus edades es 32 años. ¿Cuántos años tiene cada uno?
Si "x" representa la edad de María, y "y" la edad de Carlos, **plantee** un sistema de ecuaciones que permite resolver el problema anterior. (2 PUNTOS)

Esta pregunta tiene como objetivo investigar si los sujetos perciben correctamente el significado de que la edad de una persona exceda en 4 años la edad de otra. Además de simbolizar matemáticamente, a través de dos ecuaciones, los enunciados que permiten resolver el problema. Las respuestas al ítem presentaron, en la muestra tomada, principalmente los siguientes errores:

a) Toma $y = x + 4$

b) Interpreta incorrectamente que la suma de sus edades es 32 años

c) Trata de resolver el problema con una sola ecuación

d) Toma la expresión excede en 4 como $y = 4x$ ó x=4y

e) Plantea una ecuación de una variable de manera incorrecta.

En cuanto a la clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas al ítem se obtuvo:

Nivel	Curso Introductorio
Preestructural	1
Uniestructural	15
Multiestructural	22
Relacional	46
Total	84

Se observa que la mayoría de estudiantes se encuentran en un nivel relacional; sin embargo, casi el 27% (22 de 82) de los estudiantes diagnosticados se ubican en el nivel multiestructural, entre tanto, el 18% se encuentran en el nivel uniestructural.

Debido a que en el examen de diagnóstico el estudiante 50 (en adelante D) presentó dos de los principales errores en el ítem (nivel uniestructural) se le entrevistó después de recibir instrucción durante un semestre en un curso introductorio para comparar sus conceptualizaciones con respecto al examen de diagnóstico. En el examen de diagnóstico D interpreta incorrectamente que María excede en 4 años a la edad de Carlos y plantea una sola ecuación con dos variables para resolver el problema.

María: x
Carlos: y

Planteo
$4x+y=32$

R/ Planteo: $4x+y=32$

En la entrevista se le plantearon los siguientes problemas

Problema 1)

Yo tengo 5 años más que la edad de ella (Cruz), y juntos sumamos 47 años. Si mi edad es z, que significa que yo tenga 5 años más que ella, en términos de z, ¿qué edad tiene ella?

Cuyo objetivo es determinar si el estudiante interpreta algebraicamente lo que significa que la edad del entrevistador 1 (Greivin) exceda en 5 a la edad del entrevistador 2 (Cruz).

Ahora, ¿cómo planteo la o las ecuaciones que me permitan resolver el problema?

Cuyo objetivo es representar matemáticamente la ecuación o las ecuaciones que le permitirían resolver el problema.

Problema 2)

Tres adultos y tres niños visitan un zoológico. El costo de la entrada para niño es la mitad que el valor de la entrada para adultos, si entre los seis pagan ¢20700 por las entradas, ¿cuánto cuesta cada entrada para niño?

Cuyo objetivo es evaluar el nivel de razonamiento mostrado después de un semestre de instrucción, con el fin de comparar esos niveles.

D reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

Problema 1

D: Digamos que ella tendría *x*. Entonces sería, ¿qué dice, la suma es 47? Sería *z*+5 [Señalando la edad de Greivin] Bueno ella es *z* [Señalando la edad de Cruz].

Resuelve en la pizarra

Greivin

z años $z+5$

Cruz

z

$$z+5+z=47$$

$$2z=42$$

$$z=21$$

Nivel Relacional: obtiene de manera correcta la ecuación que resuelve el problema. Toma a *x* en vez de z.

Él sería 26 años y ella 21.

Problema 2

D: [Resuelve el problema sin hablar].

Resuelve en la pizarra

3 adutos · ₡ x

3 niños · ₡ $\frac{x}{2}$

$$3x+\frac{3x}{2}=20\,700$$

Nivel Relacional: plantea bien el problema.

D: Bueno los datos, tres niños y tres adultos [señalando la pizarra]. Digamos que la entrada para adulto cuesta *x* colones, y la de los niños es la mitad de los adultos $x/2$. Entonces sumamos, digamos, *x* es de cada adulto, entonces sería *x* por los tres adultos para sacar, después igual para los niños; y sumo, digamos las, digamos que serían las seis, las seis…

E: Ok

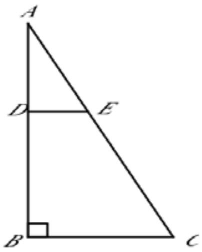
D: Despejar a ver cuánto me quedaría *x*.

D supera su nivel de razonamiento uniestructural del examen de diagnóstico. Ahora se ubica en un nivel de razonamiento relacional. D aprueba el curso con la nota mínima 70.

Principales errores cometidos en Geometría

La siguente pregunta tiene como objetivo investigar si los sujetos pueden utilizar el teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos para encontrar las medidas de dos segmentos.

6. Considere el $\triangle ABC$ con ángulo recto en B. Sabiendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, $AC = 15$ cm, $DE = 3$ cm y $AB = 12$ cm; determine las medidas de $\overline{BC}$ y $\overline{DB}$. (3 PUNTOS)



Las respuestas al ítem presentaron, en la muestra tomada, principalmente los siguientes errores:

a) Omite el criterio por el cual los triángulos son semejantes

b) Indica las medidas de los ángulos en A y/o C, asumiendo que los triángulos son isósceles.

c) Escribe las razones de manera incorrecta.

d) Calcula incorrectamente las sumas de Pitágoras

e) Indica la medida de los segmentos sin ningún cálculo anterior

f) Asume que la medida de los segmentos $\overline{DB}$ y $\overline{BC}$ son iguales

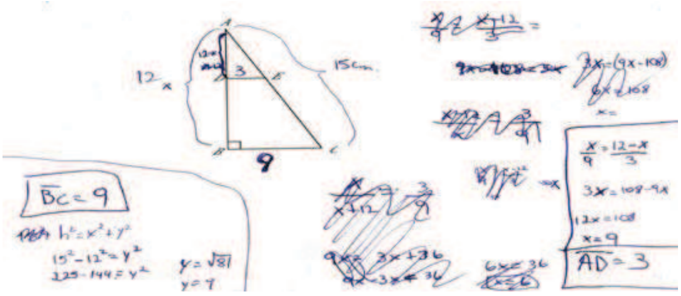
En cuanto a la clasificación de los sujetos de estudio por categorías del modelo SOLO según las respuestas dadas al ítem se obtuvo:

Nivel	Curso Introductoria
Preestructural	26
Uniestructural	30
Multiestructural	26
Relacional	2
Total	84

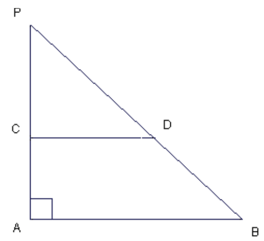
Se determina que la mayoría de estudiantes se encuentran en un nivel Multiestructural, sin embargo, casi el 36% (30 de 84) de los estudiantes diagnosticados se ubican en el nivel Uniestructural, entre tanto, el 31% se encuentran en el nivel Preestructural.

Debido a que en el examen de diagnóstico el estudiante 200 (en adelante F) presentó dos de los principales errores en el ítem (nivel uniestructural) se le entrevistó después de recibir instrucción durante un semestre en un curso introductorio.

En el examen de diagnóstico F realiza incorrectamente las razones y no indican por cual criterio los triángulos son semejantes. Su respuesta fue:



En la entrevista se le plantea el siguiente problema:



1. Si el ΔABP es semejante al ΔCDP y $m\overline{PA} = 18cm$, $m\overline{AB} = 24cm$, $m\overline{CD} = 8cm$ y $m\,\overline{PB} = 30cm$ ¿Calcule la medida del segmento $\overline{PD}$?

El objetivo es evaluar el nivel de razonamiento mostrado en un problema similar a los del examen. Además, estos tipos de problemas son abordados en los cursos universitarios introductorios. A pesar de que se garantiza que los triángulos son semejantes, se les pide que justifique por qué lo son.

F reaccionó de la siguiente manera en la entrevista:

(1) F: ¡No es una relación impar!

[Escribe en el pizarrón]

$$\frac{8}{24} = \frac{18-x}{18}$$

(2) F: [Borra $\frac{18-x}{18}$ y escribe $\frac{30-x}{30}$]

$$\frac{8}{24} = \frac{30-x}{30}$$

(3) F: [Al segmento $\overline{DB}$ le asigna y]

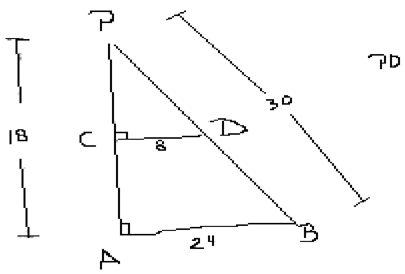
(4) F: [Borra $\frac{30-x}{30}$ y escribe en su lugar $\frac{30-y}{30}$]

$$\frac{8}{24} = \frac{30-y}{30}$$

$$\frac{\cancel{240}^{10}}{\cancel{24}_{1}} = 30-y$$

$$10-30 = -y$$

$$20 = y$$



(5) E: ¿Entonces cuál es la respuesta?

(6) F: BD igual

(7) F: [Escribe en la pizarra $x = 30 - y$]

$$\frac{\cancel{240}^{10}}{\cancel{24}_{1}} = 30 - y$$

$$10 - 30 = -y$$

$$20 = y$$

$$x = 30 - y$$

$$x = 30 - 20$$

$$x = 10$$

Nivel multiestructural: logra realizar la correspondencia entre los lados de forma correcta pero no logra decir por qué los triángulos son semejantes, no lo justifica.

(8) E: Ok, y una preguntita más,… ¿Qué significa que dos triángulos sean semejantes?

(9) F: Sería propiedad, lo que importa es que tengan los lados.

F reprueba el curso con una calificación de 35 (con base en 100)

Conclusiones

Los estudiantes entrevistados lograron un crecimiento en sus niveles de razonamiento en ambos temas después del proceso de instrucción, sin embargo, no alcanzan el nivel relacional que se requiere para que integren diversos aspectos como un todo coherente con estructura y significado.

En el tema de sistemas de ecuaciones algunos estudiantes siguen teniendo errores al interpretar el lenguaje matemático y escribirlo en simbología matemática en expresiones como “el doble”, “el triple”, “cinco años más”, entre otros; esto podría explicarse por la presencia de obstáculos epistemológicos.

En el tema de Geometría los estudiantes tienen errores al omitir los criterios de semejanza de los triángulos, utilizan proporción entre sus lados sin probar dicha semejanza. Los estudiantes deben ser sometidos a procesos metacognitivos en los que autorregulen su propio aprendizaje, de tal manera que busquen las conexiones que se requieren para alcanzar el nivel relacional. Así se recomienda que “es a través de la crítica racional y la autocrítica como podemos examinar y corregir los errores, para de esta forma lograr el conocimiento genuino” (Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2004, p.11).

Referencias bibliográficas

Bachelard, G. (1976). La formación del espíritu científico. México: Siglo XXI.

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). Evaluating the quality of learning: The Solo Taxonomy. New York: Academic Press.

Clements, M. (1980). El análisis de errores para niños escrito en tareas matemáticas.

Estudios en Educación Matemática. 11 (1), 1-21.

Cury, H. (1994). As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos. Tesis de Doctorado no publicada en Educación. Faculdad de Educação, Universida de Federal do Rio Grande do Sul.

Del Puerto, S., Minnaard, C. y Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. Revista Iberoamericana de Educación 43, 3-25.

Godino, J. Batanero C. y Font V. (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. Universidad de Granada.

Pochulu, M. (2005). Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan a la universidad. Revista Iberoamericana de Educación 35, 1-14.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Universidad La Laguna.

Ruiz, A. (2006). Escuela francesa de didáctica de las Matemáticas y la construcción de una nueva disciplina científica. Costa Rica: San José. CIMM/UCR.